

# Potensialet i oppgaver og modellering

- Hvilke lærings- og vurderingsmuligheter finnes i ulike oppgaver?

Fellestiltaket Vurdering og LK20  
September 2023



**MATEMATIKKSENTERET**

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



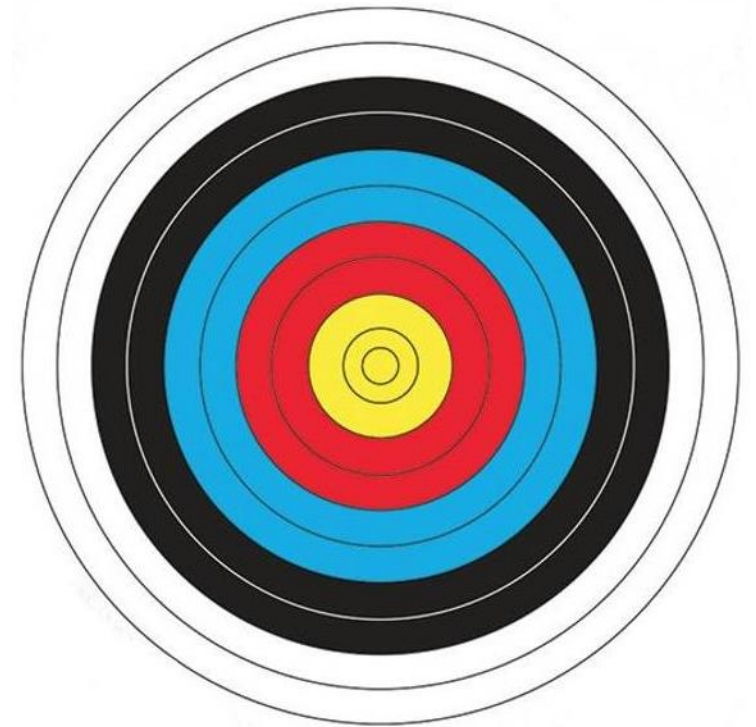
**NTNU**

Kunnskap for en bedre verden

# Mål for dagen

Deltakerne skal

- få innsikt i hva som kjennetegner matematisk modellering
- diskutere hvordan kompetanse i matematisk modellering kan vurderes
- reflektere over hva og hvordan de må vurdere, kan vurdere og ønsker vurdere
- diskutere lærings- og vurderingspotensial i ulike oppgaver



# Hvor høy er stabelen med rundballer?



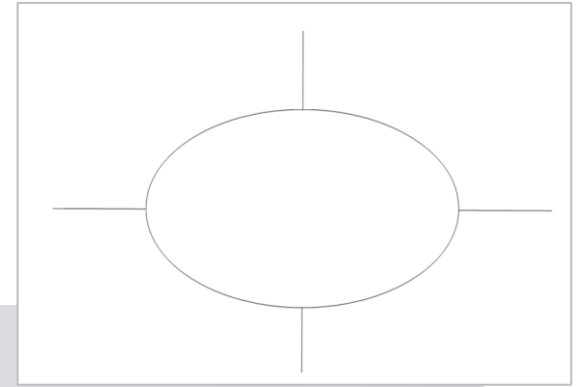
# Hva er matematisk modellering?

## IGP

Individuelt: Skriv i ditt hjørne.

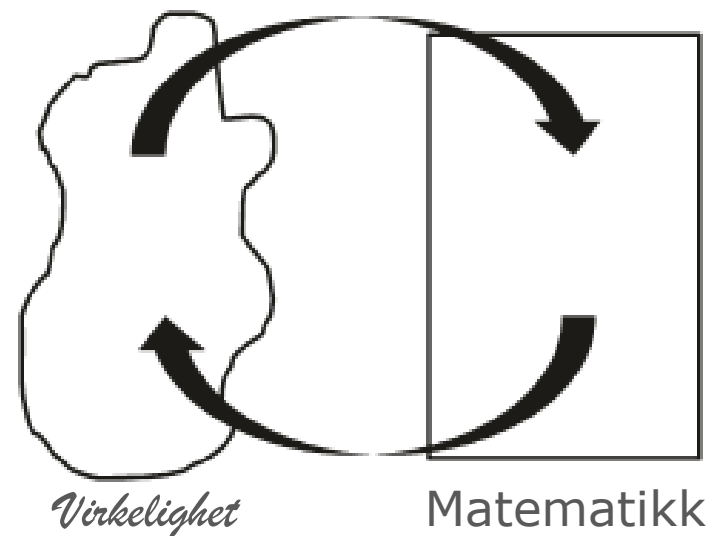
Gruppe: En og en presenterer det hen har skrevet. Bli enige om hva dere vil skrive i midten.

Plenum: Vi hører fra gruppene.



# Modellering

*Ein modell i matematikk er ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk. Elevane skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive dagleglivet, arbeidslivet og samfunnet elles. Modellering i matematikk handlar om å lage slike modellar. Det handlar òg om å kritisk vurdere om modellane er gyldige, og kva avgrensingar dei har, vurdere modellane i lys av dei opphavlege situasjonane og vurdere om dei kan brukast i andre situasjonar.*



Ferri, 2006



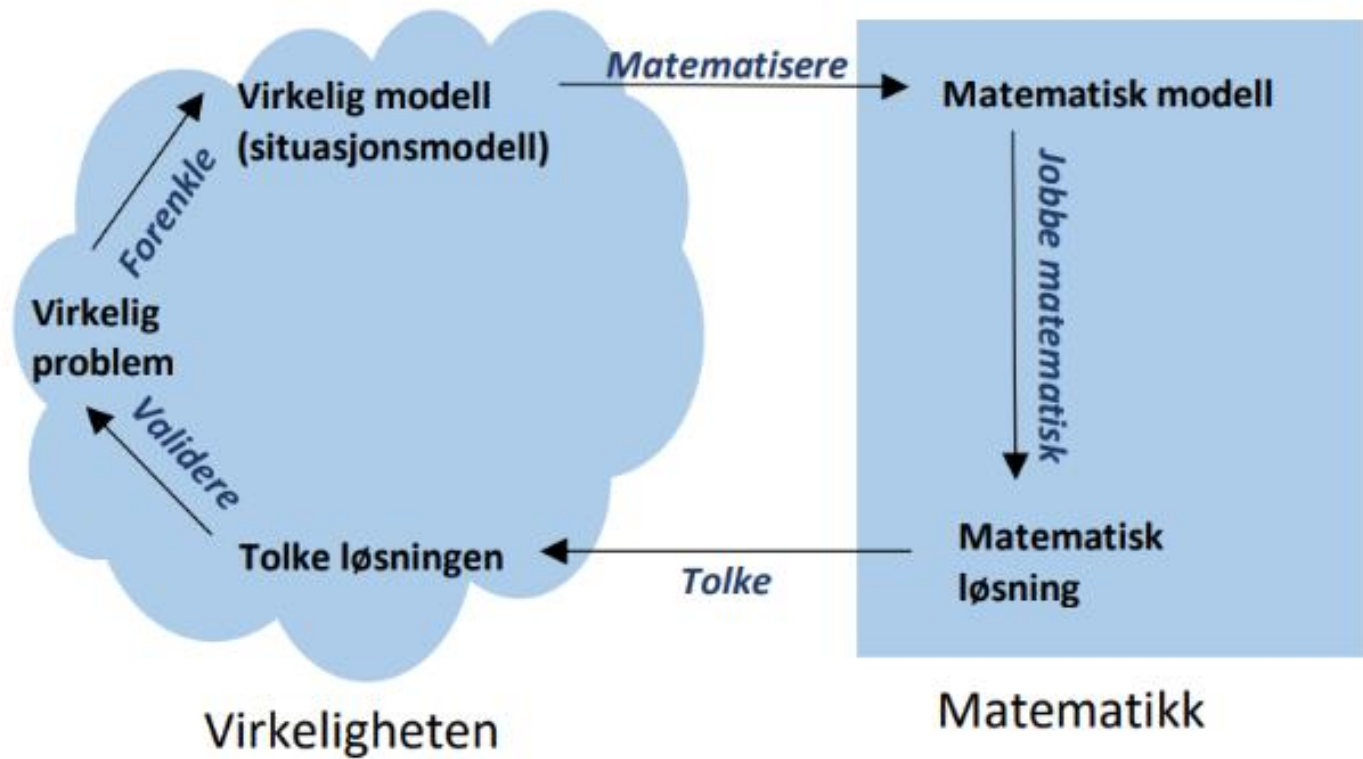
# Representasjon og kommunikasjon

(utdrag LK20)

*Representasjonar i matematikk er måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på. Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske.*

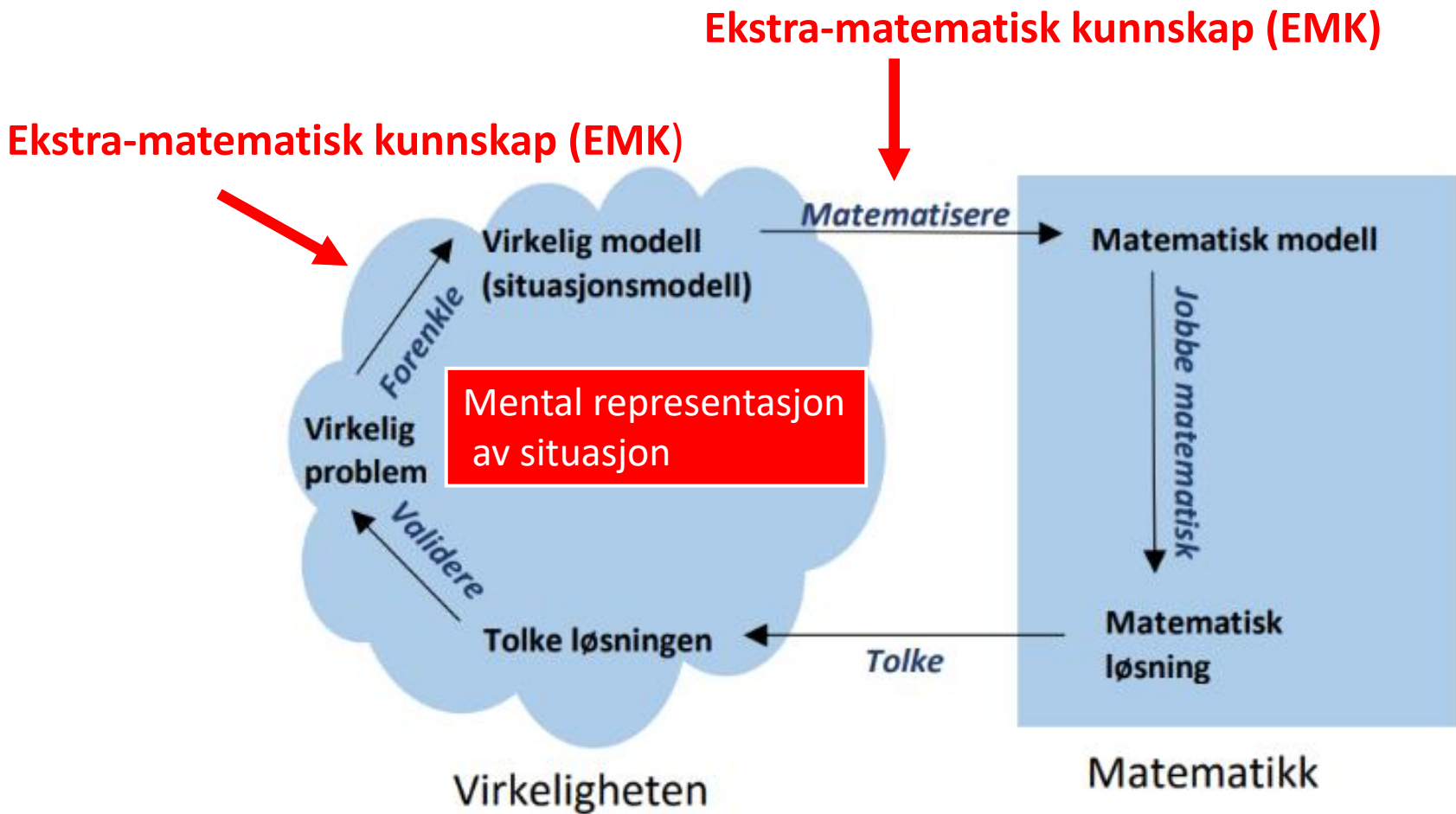


# Matematisk modellering - syklus



Maaß, 2006



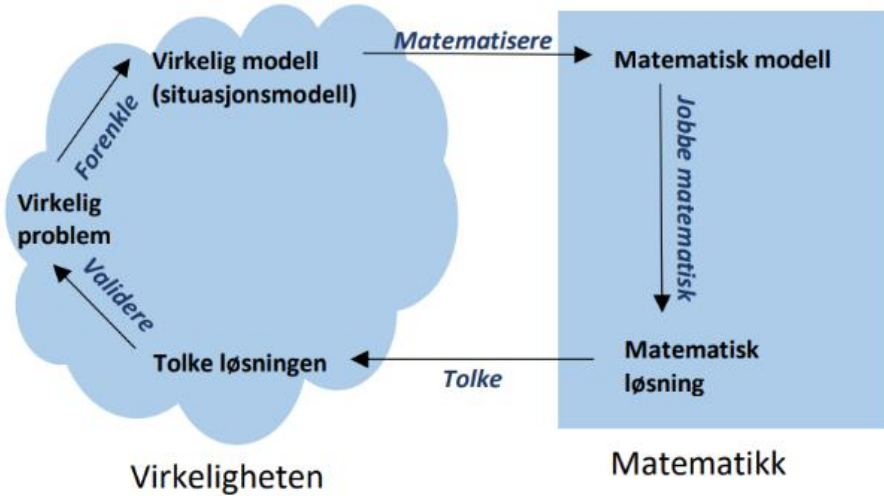


Maaß, 2006/Ferri, 2007





# Vurdere modelleringskompetanse



1. Forstå oppgaven
2. Forenkle og strukturere oppgaven
3. Matematisere
4. Arbeide matematisk
5. Tolke
6. Validere/refleksjon

Maaß, 2006



**MATEMATIKKSENTERET**

# Vurdere modelleringskompetanse

Underkompetanser:

1. Forstå oppgaven
2. Forenkle og strukturere oppgaven
3. Matematisere
4. Arbeide matematisk
5. Tolke
6. Validere/refleksjon

- Hva gjorde dere når dere arbeidet med rundballoppgaven?
- Gå gjennom punkt for punkt og kom med konkrete eksempler.
- Vurder det dere gjorde (både som gruppe og enkeltindivider).



Utdyping på hva de ulike delkompetansene innebærer (Malde, 2022) og eksempler på hvordan det kan se ut i rundballopgaven.

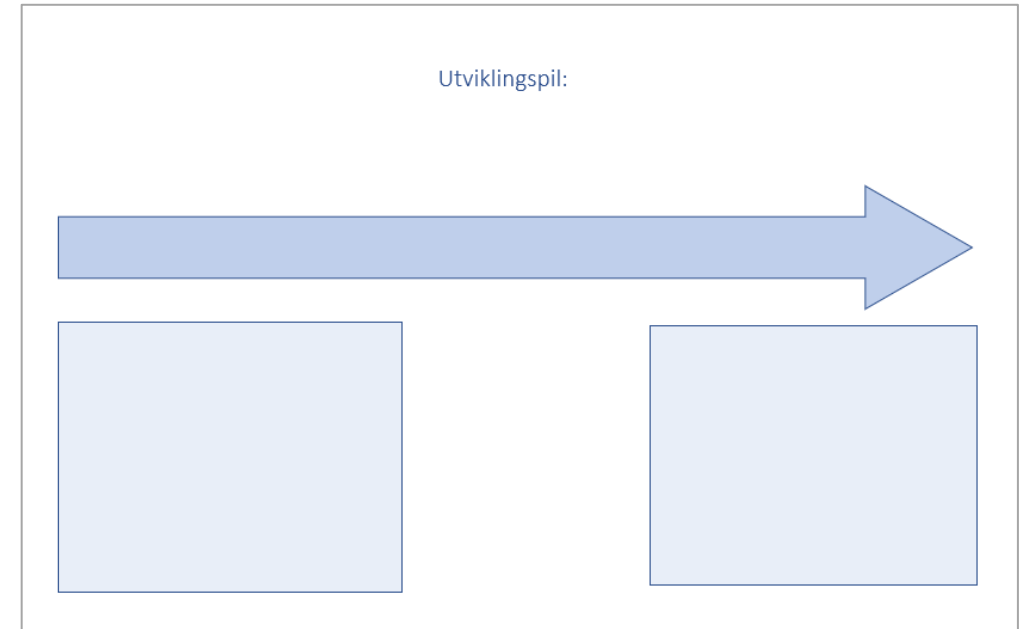
1	Forstå oppgaven	Forstå det virkelighetsbaserte problemet for å <u>danne en mental modell</u> av situasjonen.	Ut fra bilde skal vi finne høyden på stabelen med rundballer. Personen på bildet kan brukes til å stipulere høyden på en rundball.
2	Forenkler og strukturere oppgaven	Den mentale modellen danner grunnlaget for situasjonsmodellen som konstrueres ved å forenkle, strukturere og idealisere det originale problemet	Tenker total høyde på fem, for å unngå å regne med halve rundballer. Betrakter rundballene som like stor sirkler, som er stablet rett oppå hverandre. Hele personen utgjør diameteren til rundballen.
3	Matematisere	Oversette den mentale situasjonsmodellen til en matematisk modell (forankre konsept og ideer i matematiske egenskaper)	Anslår diameteren på en rundball og multipliserer med antall rundballer i høyden (vår modell er multiplikasjon).
4	Arbeide matematisk	Utføre beregninger, kalkulasjoner som kan gi en matematisk løsning	Multipliserer høyden på en rundball med antall rundballer i høyden.
5	Tolke	En matematisk løsning som deretter tolkes ut i fra den originale virkelighetsbaserte situasjonen.	Må justere mht «mellomrom». Anslår høyden på mellomrom (pkt 3). Regner ut mellomrom og trekker de fra (pkt 4). Tolker på nytt (pkt 5)
6	Validere/kritisk refleksjon	Vurdere om løsningen passer til den aktuelle situasjonen. Hvis løsningen ikke passer for virkeligheten, må syklusen gjentas flere ganger	Reflektere om løsningen kan stemme. Hvilke feilkilder kan det være. Hvis det ikke stemmer, gå tilbake og vurder hvor vi må justere

# Vurdering av kompetanse - gruppe og individuelt

Task 1	understanding the problem	making assumptions	mathematizing	working mathematically	validation, critical reflection	goal-oriented procedure
Juan	+	•	-	•	•	•
Marc	•	•	-	•	•	•
Jazman	+	+	+	+	+	+
Annabel	•	+	•	•	+	+
....						

Fig. 5.1 Diagnostically sheet for modeling activities in groups (+ excellent; • doubtful; – misconceptions/incorrect)

Ferri, 2018



## Undervegsvurdering

- Ha oversikt på prosessen
- Er det framgang?
- Misoppfatninger?
- Kan brukes av lærer
- Kan brukes som egenvurdering



# I underveisvurderingen i fag skal elever

- a) *delta i vurderingen av eget arbeid og reflektere over egen læring og faglige utvikling*
- b) *forstå hva de skal lære og hva som blir forventet av dem*
- c) *få vite hva de mestrer*
- d) *få råd om hvordan de kan arbeide videre for å øke kompetansen sin.*



Udir, 2022



**MATEMATIKKSENTERET**

# Undervegsvurdering

*All vurdering som skjer før avslutningen av opplæringen, er underveisvurdering.*

*Underveisvurdering i fag skal være en integrert del av opplæringen, og skal brukes til å fremme læring, tilpasse opplæringen og øke kompetansen i fag.*

*Underveisvurderingen kan være både muntlig og skriftlig.*

*Udir, 2022*



**MATEMATIKKSENTERET**

# Oppsummering matematisk modellering

Spørsmål/kommentarer knyttet til matematisk modellering?



**MATEMATIKKSENTERET**

## Hva MÅ vi gjøre?

- Kartleggingsprøve 3. trinn
- Nasjonale prøver (5., 8. og 9. trinn)
- Eksamen
  
- Halvårsvurdering med karakter
- Sluttvurdering
  - Standpunkt
  - Eksamen

## Mellomarbeid

Drøft hvordan skolens vurderingskultur kan videreutvikles.

- Hva gjør dere allerede bra, og hva trenger dere å bruke mer tid på i det profesjonelle læringsfellesskapet.
- Lag en plan for det videre arbeidet. Hvilken informasjon trenger dere videre? Hvem gjør hva?





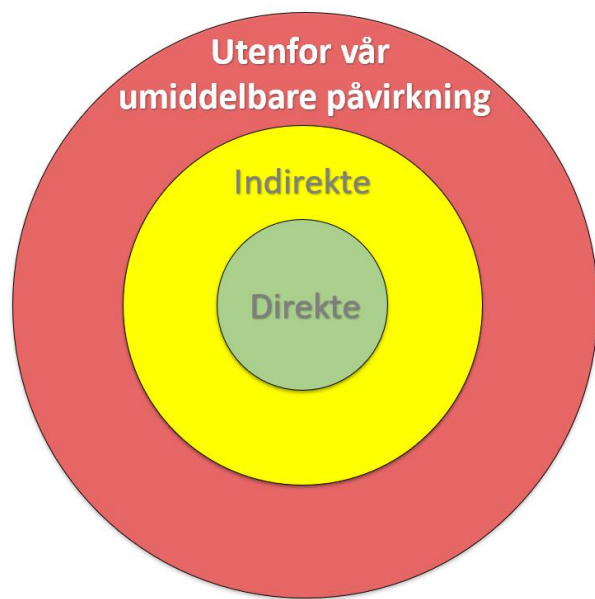
# Vurdering i en ideell verden

Individuelt:

Hva ville du ha gjort?

Gruppe:

- Del tenkeskriving i gruppa.
- Kom med konkrete eksempler på hvilke endringer dere må gjøre for å realisere det dere mener er god vurdering.



# Baller i boksen

- Et antall baller i ulike farger i ei eske (eks 6 baller)
- Trekk en ball og legg den tilbake (10 trekk)
  - følge med på farge og antall trekk
- Foreslå fordeling ut fra opplysningene.
- 10 nye trekk
  - Hva skjer?
  - Hvordan er fordelingen nå?
  - Flere som vil gjette?
  - 10 nye trekk?
- Når vi vet fargefordeling – trekk på nytt.
  - Hva er sannsynligheten for å trekke f eks blå?
  - Hvor mange røde baller er det sannsynlig at vi får ved 10 trekk?



# Lærebok

Hva får du vite om elevenes kompetanse?

- I oppgave 13.11 og 13.12?
- I baller i boksen?

## OPPGAVE 13.11

Lise får en pose med seigmenn. Hun får vite at det er 16 seigmenn i posen.

Hvis hun tar en tilfeldig seigmann fra posen, er sannsynligheten for at den er gul 0,25.

Hvor mange gule seigmenn er det i posen?

## OPPGAVE 13.12

Henrik får en pose med karameller. Det er 5 svarte karameller i posen.

Sannsynligheten for å ta en svart karamell hvis han tar en tilfeldig karamell fra posen, er 0,25.

Hvor mange karameller er det i posen?



# Kompetansemål 9. trinn (LK20)

Eleven skal kunne

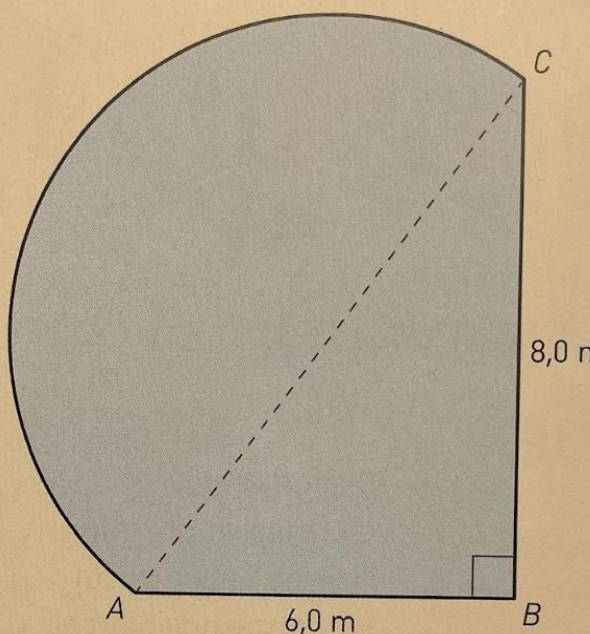
- beregne og vurdere sannsynlighet i statistikk og spill
- simulere utfall i tilfeldige forsøk og beregne sannsynligheten for at noe skal inntreffe ...

Men også kompetanse i  
utforskning, resonnering, argumentering, representasjon, kommunikasjon



# Potensialet i oppgaver

**OPPGAVE 16.11**



**a** Hva er lengden av linjestykket AC?  
**b** Hva er radien i halvsirkelen?  
**c** Hva er omkretsen av figuren?  
**d** Hva er arealet av figuren?

Et eksempel:

*Vis at arealet til figuren er omtrent  $63 \text{ m}^2$ .*

Hvordan ønsker vi at elevene skal kommunisere resonnementene sine?

# Utforsking og kommunikasjon

- hvordan vurdere?

*Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing.*

Elevene skal kommunisere gjennom ulike representasjoner:  
*Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske.*



Eksempel

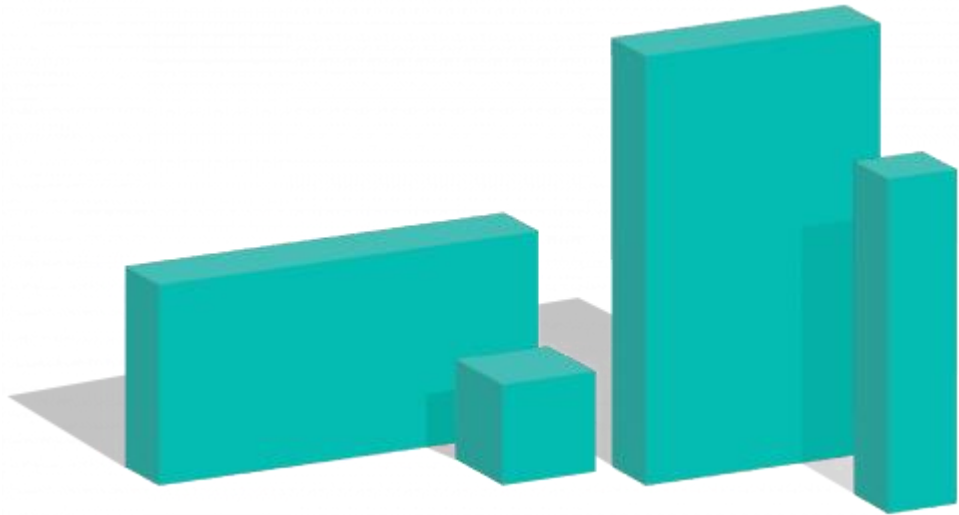
## Utviklingspil: Utforskning og kommunikasjon



1. Prøver vilkårlige tilfeller
2. Ser på hvert forsøk som enkelttilfelle uten å ta med seg erfaringene fra tidligere forsøk
3. Visker ut undervegs, har tegninger og/eller tall uten forklaringer

1. Jobber systematisk for å lete etter mønster
2. Sammenligner forsøkene og ser etter sammenhenger
3. Systematiserer forsøkene, navngir lengder/areal på figuren, visualiserer prosessen med tekst, tegninger, tabeller, symboler

# Prisme



Kan du finne et prisme, med hele tall som sidelengder, som har overflateareal på nøyaktig 100 kvadratenheter?

- Finnes det mer enn ett slikt prisme?
- Kan du finne alle?
- Kan du argumentere for at du har funnet alle mulige slike prizmer?





# Prismeoppgaven

- Hvilke kompetanser i matematikk trenger elevene for å løse oppgaven?
- Hva kan det faglige målet med denne oppgaven være?
- Hvordan vurdere arbeidet undervegs?
  - Hvilke hint kan gis?
  - Hvilke frø skal sås?
  - Hvilke spørsmål kan stilles (keep thinking)?

Tilbakemelding –  
hva og hvordan:

- Prosedyre
- Begrep
- Kompetanse



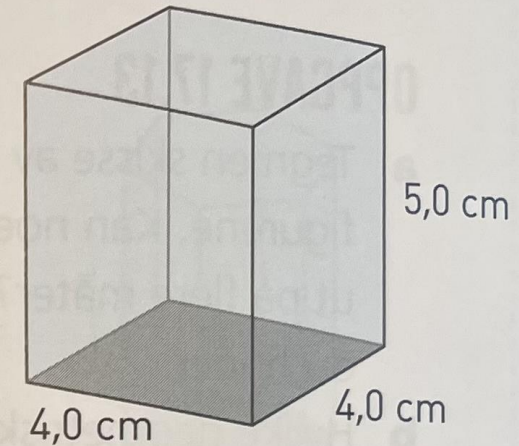
# Lærebok

Hentet fra Matemagisk 9

## OPPGAVE 17.14

Et rett rektangulært prisme har kvadratisk grunnflate med sidelengde 4,0 cm. Høyden i prismet er 5,0 cm.

- a** Regn ut volumet av prismet. Oppgi svaret med minst to ulike målenheter.
- b** Regn ut overflaten av prismet.



Hva forventer vi at elevene skal gjøre?  
Hvordan skal vi vurdere arbeidet?



**MATEMATIKKSENTERET**

# Potensialet i oppgaver

Eksempler på ulike oppgavetyper

- Rutineoppgaver
- Flervalgsoppgaver (kenguru, NP)
- Problemløsningsoppgaver
- Åpne oppgaver (type 3 oppgaver eksamen)
- LIST-oppgaver

Hva vil du  
med oppgaven?



# Flervalgsoppgaver

## Nasjonale prøver

Maria går til skolen.

Når hun har gått 900 m, har hun tilbakelagt  $\frac{3}{5}$  av skoleveien.

Hvor lang skolevei har Maria?

- A 540 m
- B 935 m
- C 1 500 m
- D 1 800 m



**MATEMATIKKSENTERET**

## Matematikkstien (matematikk.org)

Grønnsakshagen til Hanne er formet som et kvadrat. Arealet til hagen er  $20 \text{ m}^2$ . Rundt hagen er det et gjerde.

Hvilket regneuttrykk viser hvor langt gjerdet er?

- A  $20 \cdot 4$
- B  $\sqrt{20} \cdot 4$
- C  $20 : 4$
- D  $20^2 : 4$
- E  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 4$



**MATEMATIKKSENTERET**  
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

# Oppsummering og veien videre



**MATEMATIKKSENTERET**

# Kort oppsummering av dagen

- Hva er matematisk modellering?
- Vurdering av modelleringskompetanse?
- Vurdering i en ideell verden
- Potensialet i oppgaver
  - Utvidelse
  - Vurdering



<https://bit.ly/3357ggh>



Evaluering

# Oversikt over tema

Samling	Tema
<b>Samling 1</b>	Hva er vurdering? (Felles for matematikk, norsk og engelsk.) Hva er kompetanse i matematikk og hvordan kan man vurdere kompetanse?
<b>Samling 2</b>	Utviklingspil – et verktøy for å vurdere kjerneelementer Kjerneelement: Argumentasjon
<b>Samling 3</b>	Undervisning og vurdering – to sider av samme sak!
<b>Samling 4</b>	Sluttvurdering – hva skal legges til grunn for standpunktkarakter? Kjerneelement: Generalisering
<b>Samling 5</b>	Vurdering av matematisk modellering og potensialet i oppgaver





# Veien videre

Samling 6 – september 24



*Underveisvurdering i fag skal være en integrert del av opplæringen, og skal brukes til å fremme læring, tilpasse opplæringen og øke kompetansen i fag.*

UDIR, 2022



**MATEMATIKKSENTERET**



# Takk for i dag!

## MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– ET SAMSPILL MELLOM PRAKSIS, FORSKNING OG UTVIKLING

Vi er en utviklingspartner i lokal kompetanseutvikling



Vi forsker på matematikkundervisning



Vi tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning



Aktiviteter og undervisningsopplegg for barnehage og skole.



Utforsknings- og problemløsningsaktiviteter for barnehage og skole.



Spill, oppgaver, aktiviteter og fakta om matematikk.



Samleside med ressurser om matematikk i barnehagen.



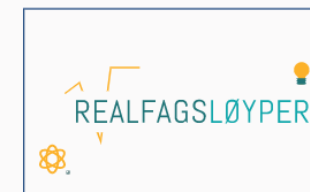
Vurderingsverktøy for kartlegging av taloppfatning og tallforståelse. Inkluderer håndbok med veiledningsmateriell.



Oppgaver som inspirerer til samarbeid, utforskning og problemløsning, hentet fra Kengurukonkurransen.



Samleside for GeoGebra. Undervisningsopplegg, digitale kurs og andre læringsressurser.



Didaktisk kompetanseutvikling i realfagene, utviklet av Matematikksenteret og Naturfagsenteret.



# Flere modelleringsoppgaver

Kriterier for gode modelleringsoppgaver:

- Åpen
- Kompleks
- Realistisk
- Autentisk
- Problembasert
- Mulig å løse gjennom modelleringsprosessen

Se eksempler på  
modelleringsoppgaver  
på de neste sidene.



# Flytur

Hanna fra Trondheim vil reise bort en uke til Oxford i England for å besøke vennen sin. Flyturen fra Værnes til Heathrow koster totalt 1760 kr. Bussbilletten fra Trondheim til Værnes koster 160 kr én vei, men hvis man kjøper tur-retur koster billetten 300 kr. Parkering på Værnes koster 36 kr per time, og 8 dager koster 430 kr. Bussen fra Heathrow til Oxford koster 20 pund. Hvor mye må Hanna betale i reiseutgifter?



# Pizza

I familien Hansen er det to barn, Nike på 12 år og Fransine på 8 år. Begge elsker å spise pizza, og derfor spiser de det to ganger i uka. De liker ulike topping på pizzaen: pepperoni, mozzarella og vegetar. Hvor mye må pappa Hansen betale for pizza i løpet av et helt år?



# Juletrelys

Juletreet skal settes opp i gymsalen på skolen, slik det gjøres hvert år. I år har rektor bestemt at skolen skal kjøpe nye juletrelys, og at disse skal være lyslenker festet sammen til et nett. Hvor stort må lysnettet være for at det skal dekke treet?



# Flyttebil

Storesøsteren din skal flytte til en ny leilighet. Hun har mange ting, men ønsker å spare penger. Derfor har hun leid en varebil for én dag (se bildet). Hjelp henne med å finne ut hvordan flest mulig pappesker kan plasseres i bilen, sånn at hun ikke trenger å kjøre så mange turer. Lag gjerne en skisse.



# Modelleringsoppgaver på MatteLIST

<https://mattelist.no/466> - Strikkhopp

<https://mattelist.no/263> - En stabel med sjiraffer

<https://mattelist.no/434> - Bjarnes bensindilemma

<https://mattelist.no/257> - Supersterke maur

<https://mattelist.no/581> - Hva er billigst?

<https://mattelist.no/262> - 10 km med skolemelk



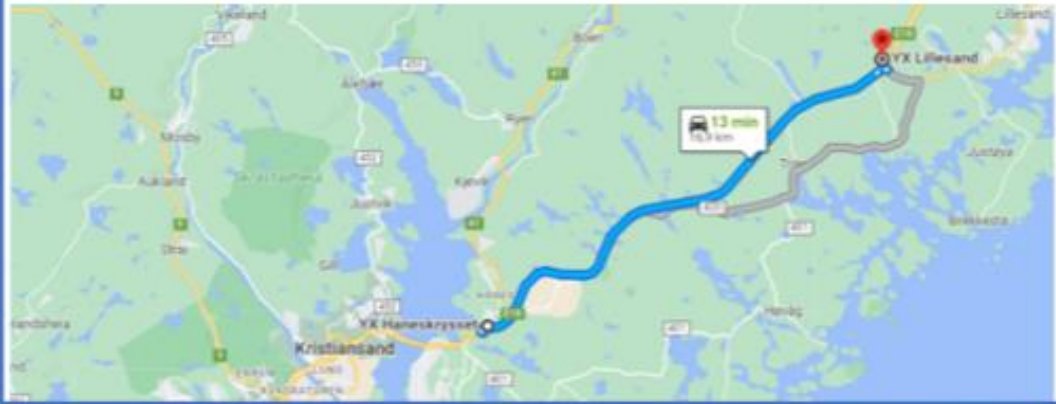


# Temanummer Tangenten 2/2024: Matematisk modellering

## Oppgave: Fulle drivstoff

Cecilie bor på Hånes. For å fylle drivstoff på hennes VW golf kjører hun til YX Lillesand. Der betaler hun i gjennomsnitt 19 kr per liter, men på Hånes må hun betale 21,50 kr per liter.

Lønner det seg for Cecilie å fylle drivstoff i Lillesand? Begrunn svaret.



Oppgaven «Filling up» er fra Blum & Leiß (2006), tilpasset norsk kontekst av Karoline Engestøl.

Prøv ut og send gjerne  
inn bidrag til Tangenten 😊

<http://tangenten.no/temanummer-tangenten-2-2024-modellering/>



**MATEMATIKKSENTERET**